§ S^3 上的 Dirac 譜

S^3 可視為 R^4 中的單位球面，具有非常豐富的對稱性，它不僅是一個黎曼流形，還是一個李群，同構於特殊酉群 SU(2)。這種高度的對稱性是能夠精確計算其譜的關鍵。

Dirac 算子 D 是在具自旋結構的黎曼流形上作用於旋量場的一階微分算子。它的定義依賴於度規和與之相容的聯絡。

推導的核心工具：Lichnerowicz 公式 $D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}R$

其中 $\nabla^*\nabla$ 是旋量場上的 Bochner Laplace 算子

半徑為 r 的 n 維球面，其純量曲率 $R = \frac{n(n-1)}{r^2}$

所以 $D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{3}{2}$

若 ψ 是 D 的一個特徵旋量，滿足 $D\psi = \lambda\psi$ ，則 $D^2\psi = D(\lambda\psi) = \lambda^2\psi$

同時，ψ 也必須是 $\nabla^*\nabla$ 的特徵旋量，假設其特徵值為 μ ，$\nabla^*\nabla\psi = \mu\psi$

則 $\lambda^2 = \mu + \frac{3}{2}$

我們的任務現在轉變為：**求解 S^3 上旋量拉普拉斯算子 $\nabla^*\nabla$ 的譜 μ**。

4. 利用對稱性與表示理論求解 $\nabla^*\nabla$ 的譜

這一步是整個推導中最深刻的部分。由於 $S^3 \cong SU(2)$，其上的幾何算子（如拉普拉斯算子）的特徵空間可以通過 $SU(2)$ 的表示理論來完全刻畫。

- S^3 的對稱性由 $Spin(4)$ 群描述，而 $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$。
- S^3 上的旋量場空間可以分解為 $SU(2) \times SU(2)$ 的一系列不可約表示 (irreducible representations) 的直和。
- 旋量拉普拉斯算子 $\nabla^*\nabla$ 在每一個不可約表示子空間上是一個常數（根據舒爾引理 Schur's Lemma）。

通過複雜的表示理論計算（涉及到 Peter-Weyl 定理和 Casimir 算子的特徵值），可以得出作用在旋量場上的拉普拉斯算子 $\nabla^*\nabla$ 的特徵值 μ_k 為：

$$\mu_k = (k+2)(k+1) - \frac{3}{4} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots$$

開方後，我們得到狄拉克算子的特徵值：

$$\lambda_k = \pm\left(k + \frac{3}{2}\right) \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots$$

6. 重數的計算

特徵值的重數，即對應特徵空間的維度，同樣來自於表示理論。它等於構成該特徵空間的 $SU(2) \times SU(2)$ 不可約表示的維度。計算表明，這個維度是：

$$\mathrm{mult}(\lambda_k) = (k+1)(k+2)$$

總結

S^3 上的狄拉克譜是一個非常優美的結果，它完美地展示了流形的幾何（曲率）、分析（微分算子）和對稱性（李群表示理論）之間深刻的內在聯繫。這個結果是譜幾何領域的一個典範，並且在數學物理，特別是與規範場論和引力相關的領域，有著重要的應用。